

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελληνίων Εξετάσεων Εσπερινών Γενικών Λυκείων

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο **σελίδα 251**.

A2. Σχολικό βιβλίο **σελίδα 150**.

A3.

- α. Λάθος**
- β. Σωστό**
- γ. Σωστό**
- δ. Σωστό**
- ε. Λάθος**

ΘΕΜΑ Β

B.1

$$2|z|^2 + (z + \bar{z}) \cdot i - 4 - 2i = 0 \quad (1)$$

Έστω $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε η (1) γράφεται:

$$2\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2 + 2\alpha \cdot i - 4 - 2 \cdot i = 0 \Leftrightarrow (2\alpha^2 + 2\beta^2 - 4) + (2\alpha \cdot i - 2 \cdot i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(\alpha^2 + \beta^2 - 2) + 2(\alpha - 1) \cdot i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - 2 = 0 \\ \alpha - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + \beta^2 - 2 = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta^2 = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \pm 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ και } \beta = 1 \\ \alpha = 1 \text{ και } \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$$

B.2

$$\begin{aligned} w &= 3 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{39} = 3 \cdot \left(\frac{(1+i)^2}{(1+i) \cdot (1-i)} \right)^{39} = \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1-1+2i}{1^2-i^2} \right)^{39} = 3 \cdot \left(\frac{2i}{2} \right)^{39} = 3 \cdot i^{39} \stackrel{39=4 \cdot 9+3}{=} 3 \cdot i^3 = -3i \end{aligned}$$

B.3

α' τρόπος

$$|u+v| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i| = |4(1+i) - (1-i) - i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i| = |4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i| = |3+4i| \Leftrightarrow$$

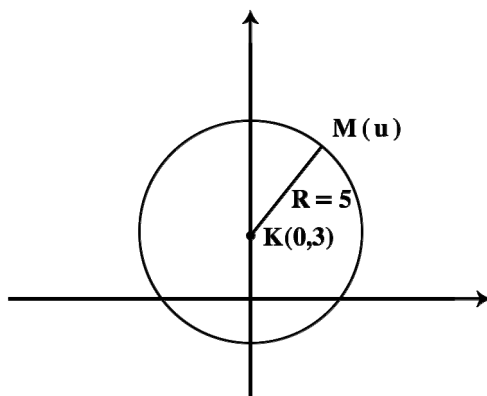
$$|u-3i| = \sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow$$

$$|u-3i| = 5$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των $M(u)$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο

$K(0,3)$ και ακτίνα $R=5$

$$C: x^2 + (y-3)^2 = 5^2$$



B.3

B' τρόπος

Έστω $u = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ με εικόνα $M(u) = M(x, y)$ στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η

$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$ γίνεται:

$$|(x + yi) + (-3i)| = |4(1+i) - (1-i) - i| \Leftrightarrow$$

$$|x + (y-3)i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

που είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $R = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής ως πολυωνομική με:

$$f'(x) = \left((x-3)^2 \cdot (x-1) \right)'$$

$$f'(x) = 2 \cdot (x-3) \cdot (x-3)' \cdot (x-1) + (x-3)^2 \cdot (x-1)'$$

$$f'(x) = 2 \cdot (x-3) \cdot (x-1) + (x-3)^2$$

$$f'(x) = (x-3) \cdot (2x-2+x-3)$$

$$f'(x) = (x-3) \cdot (3x-5)$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot (3x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{3} \right] \cup [3, +\infty)$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
$f(x)$				

Αφού $f'(x) > 0$ στο $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cup (3, +\infty)$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ και στο $[3, +\infty)$

Αφού $f'(x) < 0$ στο $\left(\frac{5}{3}, 3\right)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{5}{3}, 3\right]$

Γ.2

(η): $y = 4x + 3$ με $\lambda_\eta = 4$

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) εφάπτεται στην C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και έχει εξίσωση:

$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$

$$\varepsilon // \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta \Leftrightarrow f'(x_0) = 4 \Leftrightarrow (x_0 - 3)(3x_0 - 5) = 4 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 14x_0 + 15 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x_0^2 - 14x_0 + 11 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \quad \text{ή} \quad x_0 = \frac{11}{3} \notin \mathbb{Z} \text{ απορρίπτεται}$$

$$f(1) = (1-3)^2(1-1) = 0$$

Οπότε το σημείο επαφής είναι το $A(1, f(1))$ και η εξίσωση της ζητούμενης

εφαπτομένης είναι: $(1) \Rightarrow (\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = 4(x - 1) \Leftrightarrow$

$$\boxed{(\varepsilon): y = 4x - 4}$$

Γ.3

$$g(x) = (x-1)f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = (x-1)(x-3)^2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = (x-1)^2(x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow g(x) = [(x-1)(x-3)]^2$$

$$\Leftrightarrow g(x) = (x^2 - 4x + 3)^2$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με:

$$g'(x) = 2(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 3)'$$

$$= 2(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)$$

$$= 4(x^2 - 4x + 3)(x - 2)$$

$$= 4(x-1)(x-3)(x-2)$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
x-1	-	0	+	+	+		
x-3	-	-	-	0	+		
x-2	-	-	0	+	+		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							
		f(1)	f(2)	f(3)			
		T.E.	T.M.	T.E.			

Αφού:

$$\left. \begin{array}{l} g'(1) = 0 \\ g'(x) < 0 \text{ στο } (-\infty, 1) \\ g'(x) > 0 \text{ στο } (1, 2) \\ g: \text{συνεχής} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } g \text{ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο } x_1 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(2) = 0 \\ g'(x) > 0 \text{ στο } (1, 2) \\ g'(x) < 0 \text{ στο } (2, 3) \\ g: \text{συνεχής} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } g \text{ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο } x_2 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(3) = 0 \\ g'(x) < 0 \text{ στο } (2, 3) \\ g'(x) > 0 \text{ στο } (3, +\infty) \\ g: \text{συνεχής} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } g \text{ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο } x_3 = 3$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1

$$h(x) = \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1}, \quad x \neq -1, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Αφού η $(\varepsilon): y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$, θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = 1 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - x] = -2 \quad (2)$$

•για $x \in (\beta, +\infty)$:

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{\frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1}}{x} = \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha$$

$$(1) \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

•για $x \in (\beta, +\infty)$:

$$\begin{aligned} h(x) - x &= \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1} - x = \frac{\alpha x^2 - x + 2 - x^2 - x}{x+1} \\ &= \frac{(\alpha - 1)x^2 - 2x + 2}{x+1} \stackrel{(\alpha=1)}{=} \frac{-2x + 2}{x+1} \end{aligned}$$

οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2 \quad \text{άρα} \quad \boxed{\alpha = 1}$$

Δ.2

Για $\alpha = 1$: $h(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$

α)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - x + 2 - (x - 2)(x + 1)}{x + 1} \right] =$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - x + 2 - x^2 + x + 2}{x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x + 1} \right) = 0$$

Άρα η (ε) είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

β)

$$h(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = (x^2 - x + 2) \cdot \frac{1}{x + 1}$$
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[(x^2 - x + 2) \cdot \frac{1}{x + 1} \right] = -\infty, \text{ διότι:}$$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - x + 2) = 1 + 1 + 2 = 4 > 0$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{1}{x + 1} \right) = -\infty$

Ομοίως:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = +\infty, \text{ διότι: } \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x + 1} \right) = +\infty$$

άρα η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και αριστερά και δεξιά του -1 .

Δ.3

$$h(x) + \frac{(x+3)^4}{x} = 0$$

$$\text{Έστω } g(x) = h(x) + \frac{(x+3)^4}{x}, \text{ με } x \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1} + \frac{(x+3)^4}{x} = \frac{x(x^2 - x + 2) + (x+1)(x+3)^4}{x(x+1)}$$

Έστω $\tau(x) = x(x^2 - x + 2) + (x+1)(x+3)^4$ η οποία ορίζεται κ' είναι συνεχής, ως πολυωνυμική, στο $[-1, 0]$

$$\tau(-1) = -(1+1+2) + (-1+1)(-1+3)^4 = -4 < 0$$

$$\tau(0) = 0(0-0+2) + (0+1)(0+3)^4 = 81 > 0$$

$$\text{δηλαδή } \tau(-1)\tau(0) < 0$$

Άρα από το Bolzano για την τ στο $[-1, 0]$, άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$ τέτοιο ώστε $\tau(\rho) = 0$

Αφού $g(x) = \frac{\tau(x)}{x(x+1)}$ το ρ είναι ρίζα της $g(x) = 0$ στο $(-1, 0)$